



TITLE:

## 2次元球面のGottlieb群 (新しい観点からみた変換群論)

AUTHOR(S):

井上, 明

---

CITATION:

井上, 明. 2次元球面のGottlieb群 (新しい観点からみた変換群論). 数理解析研究所講究録 2002, 1290: 25-27

ISSUE DATE:

2002-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/42514>

RIGHT:

## 2次元球面のGottlieb群

大阪大学・理 井上 明 (Akira Inoue)

§0 ファイバーが  $F$  であるファイブレーションとファイバー写像  $f$  に対して, 包含写像  $i: F \rightarrow E$  がホモトピー左逆写像を持つとき,  $G_n^f(E, F)$  は  $G_n^f(F, F) \oplus \pi_n(B)$  に等しい事が [5] で示されている. ここでは, 切断  $s: B \rightarrow E$  を持つファイブレーション  $F \rightarrow E \rightarrow B$  に対し,  $G_n^{sop}(E, E)$  は  $G_{n+1}^R(p) \oplus G_n(B)$  に同型である事を示し, これにより, 2次元球面のGottlieb群を計算する.

§1 すべての空間は連結有限CW複体とし, すべての空間対はCW対とする.  $x_0$  を  $X$  とその部分空間の基点とし,  $X^A$  で  $A$  から  $X$  への写像空間を表す. また,  $\omega$  で  $X^X$  または  $X^A$  から  $X$  への基点  $x_0$  での評価写像を表す. そうして  $G_n(X)$  を  $G_n(X) = \{[h] \in \pi_n(X) \mid [H|_{x_0 \times I^n}] = [h], H|_{X \times \partial I^n} = id_X \text{ なる } H: X \times I^n \rightarrow X \text{ が存在する.}\}$  と定義する. これは  $\omega_{\#}: \pi_n(X^X, id_X) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$  の像に等しい. また, 写像  $f: (A, a_0) \rightarrow (X, x_0)$  に対して  $G_n^f(X, A)$  を  $G_n^f(X, A) = \{[h] \in \pi_n(X) \mid [H|_{x_0 \times I^n}] = [h], H|_{A \times \partial I^n} = f \text{ なる } H: X \times I^n \rightarrow X \text{ が存在する.}\}$  と定義する. これは  $\omega_{\#}: \pi_n(X^A, f) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$  の像に等しい. 特に, 包含写像  $i: A \rightarrow X$  に対して,  $G_n^i(X, A)$  を  $G_n(X, A)$  と書く. また一般に  $G_n(X) \subset G_n^f(X, A)$  が成り立つ. 次に,  $G_n^{Rel}(X, A)$  を  $\pi_n(X, A)$  の部分群として,  $G_n^{Rel}(X, A) = \{[h] \in \pi_n(X, A) \mid [H|_{x_0 \times I^n}] = [h], H|_{X \times J^{n-1}} = id_X \text{ なる } H: (X \times I^n, A \times \partial I^n) \rightarrow (X, A) \text{ が存在する.}\}$  と定義し, 対の自己写像  $f: (X, A) \rightarrow (X, A)$  に対して  $G_n^{Rel}(f)$  を  $G_n^{Rel}(f) = \{[h] \in \pi_n(X, A) \mid [H|_{x_0 \times I^n}] = [h], H|_{X \times J^{n-1}} = f \text{ なる } H: (X \times I^n, A \times \partial I^n) \rightarrow (X, A) \text{ が存在する.}\}$  と定義する. これらもまた,  $G_n^{Rel}(X, A) = \omega_{\#}(\pi_n(X^A, A^A, i)), G_n^{Rel}(f) = \omega_{\#}(\pi_n(X^A, A^A, f))$  となる.

写像  $f$  のホモトピー群  $\pi_n(f) = \{[(\alpha_1, \alpha_2)] \mid (\alpha_1, \alpha_2): \pi_n \rightarrow f\}$  が定義される.[3] ここで,  $CS^{n-1}$  は約錐であり,  $i_n: S^{n-1} \rightarrow CS^{n-1}$  は標準的な包含写像である. また,  $F_1: A \times S^{n-1} \rightarrow A$ ,  $F_2: A \times CS^{n-1} \rightarrow X$  が  $F_1|_{a_0 \times S^{n-1}} = \alpha_1, F_1|_{A \times s_0} = id$ ,  $F_2|_{a_0 \times CS^{n-1}} = \alpha_2, F_2|_{A \times s_0} = f$  を満たし, さらに, 次の可換図式,

$$\begin{array}{ccc} A \times S^{n-1} & \xrightarrow{F_1} & A \\ \downarrow id \times i_n & & \downarrow f \\ X \times CS^{n-1} & \xrightarrow{F_2} & X \end{array}$$

を満たす,  $(F_1, F_2)$  を  $(\alpha_1, \alpha_2)$  の提携写像と言う. ここで  $a_0$  は  $A$  の,  $s_0$  は  $S^{n-1}$  と

$CS^{n-1}$  の基点を表す. そうして  $\pi_n(f)$  の部分群  $G_n^R(f)$  を  $G_n^R(f) = \{[(\alpha_1, \alpha_2)] \in \pi_n(f) \mid (\alpha_1, \alpha_2) \text{ の提携写像 } (F_1, F_2) \text{ が存在する.}\}$  と定義する.

§2 包含写像  $i: A \rightarrow X$  がホモトピー右逆写像を持つとき次のことが言える.

定理 1.  $(X, A)$  を CW 対とする. 包含写像  $i: A \rightarrow X$  がホモトピー右逆写像  $r$  を持つ, すなわち,  $i \circ r$  が恒等写像  $id_X$  にホモトピックであるとき,  $G_n^{roi}(A, A)$  は  $G_{n+1}^{Rel}(X, A) \oplus G_n(X, A)$  に同型である.

次に写像  $f: A \rightarrow X$  がホモトピー右逆写像  $h$  を持つときを考える.  $f$  の写像柱を  $Z_f$  とすると,  $A$  から  $Z_f$  の包含写像はホモトピー右逆写像を持つ. したがって,  $G_n^f(X, A)$  と  $G_n(Z_f, A)$ ,  $G_n^R(f)$  と  $G_n^{Rel}(Z_f, A)$  とがそれぞれ同型になる [6] と言うことに注意しこれに定理 1 を適用すると次が得られる.

定理 2. 写像  $f: A \rightarrow X$  がホモトピー右逆写像  $h$  を持つ, すなわち,  $h \circ f$  が恒等写像  $id_X$  にホモトピックであるとき,  $G_n^{hof}(A, A)$  は  $G_{n+1}^R(f) \oplus G_n^f(X, A)$  に同型である.

そうして, 切断を持つファイブレーションに対し, これを適用して,  $G_n^p(B, E) = G_n(B)$  となる事より, 次を得る.

定理 3.  $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$  を切断  $s: B \rightarrow E$  を持つファイブレーションとすると,  $G_n^{op}(E, E)$  は  $G_{n+1}^R(p) \oplus G_n(B)$  に同型である.

§3 最後に, 2次元球面の Gottlieb 群の計算をしておく. その前に以下の計算で用いる補題 [4] を 1 つの述べておく.

補題 4. 写像  $f: X \rightarrow Y$  に対して,  $F|_{Y \vee X} = id_Y \vee f$  となる写像  $F: Y \times X \rightarrow Y$  が存在するならば,  $f_*(\pi_n(X)) = G_n(X)$  となる.

Hopf ファイブレーション  $S^1 \rightarrow S^3 \xrightarrow{\pi} S^2$  とこれに同伴するファイバーが  $S^3$  である  $S^1$  バンドル

$$S^3 \rightarrow S^3 \times_{S^1} S^3 \xrightarrow{p} S^2$$

を考える.  $G_1(S^3) = 0$  よりこのバンドルは切断を持つ [2]. 故に, 定理 3 より

$$G_n^{op}(S^3 \times_{S^1} S^3, S^3 \times_{S^1} S^3) \cong G_{n+1}^R(p) \oplus G_n(S^2) \quad (1)$$

今  $S^1$  は  $S^3 \times_{S^1} S^3$  に  $e^{i\theta}(z, w) = (ze^{-i\theta}, e^{i\theta}w)$  (ここで  $e^{i\theta} \in S^1, (z, w) \in S^3 \times S^3$  とし,  $z, w$  は大きさが 1 の 4 元数とみて, 右辺の  $ze^{-i\theta}, e^{i\theta}w$  は 4 元数の積とみなす) と自由に作用するから  $S^1 \rightarrow S^3 \times S^3 \xrightarrow{q} S^3 \times_{S^1} S^3$  は主バンドルとなり, ファイバーホモトピー完全系列から  $i \geq 3$  に対して,

$$\pi_i(S^3 \times_{S^1} S^3) \cong \pi_i(S^3 \times S^3)$$

また,  $F : (S^3 \times_{S^1} S^3) \times (S^3 \times S^3) \rightarrow (S^3 \times_{S^1} S^3)$  を  $F([z, w], (t, u)) = [tz, wu]$  とすると,  $F|_{(S^3 \times_{S^1} S^3) \vee (S^3 \times S^3)} = id \vee q$ . 故に補題 4 より,  $q_* : \pi_n(S^3 \times S^3) \rightarrow G_n(S^3 \times_{S^1} S^3)$  は全射. また主  $S^1$  バンドル  $q$  のファイバーホモトピー完全系列を考えると,  $i \geq 3$  に対して  $q_* : \pi_i(S^3 \times S^3) \rightarrow \pi_i(S^3 \times_{S^1} S^3)$  は同型となるから,  $i \geq 3$  に対して

$$G_i(S^3 \times_{S^1} S^3) = \pi_i(S^3 \times_{S^1} S^3)$$

一般に  $G_n(S^3 \times_{S^1} S^3) \subset G_n^{sop}(S^3 \times_{S^1} S^3, S^3 \times_{S^1} S^3) \subset \pi_n(S^3 \times_{S^1} S^3)$  となるから,  $i \geq 3$  に対して  $G_i^{sop}(S^3 \times_{S^1} S^3, S^3 \times_{S^1} S^3) = \pi_i(S^3 \times_{S^1} S^3) = \pi_i(S^3 \times S^3)$  が言える. すると, (1) と  $G_{n+1}^R(p) \subset \pi_n(S^3)$ ,  $G_n(S^3) \subset \pi_n(S^3)$  から,

$$G_i(S^2) \cong \pi_i(S^3)$$

を得る.

## 参考文献

- [1] D.H.Gottlieb, *A certain subgroup of the fundamental group*, Amer.J.Math.87 (1965), 840-856
- [2] —, *Evaluation subgroups of homotopy groups*, Amer.J.Math.91(1969), 729-756
- [3] P.Hilton, *Homotopy theory and duality*, Thomas Nelson and Sons LTD, 1965
- [4] G.E.Lang, Jr., *Evaluation subgroups of factor spaces*, Pacific J.Math.42(1972), 701-709
- [5] M.H.Woo,  *$G(f)$ -sequence and fibrations*, Comm.Korean Math.Soc.12(1997), 709-715
- [6] J.Pan, X.Shen and M.H.Woo, *The  $G$ -sequence of a map and its exactness*, J.Korean Math.Soc.35(1998), 281-294